

МИНОБРНАУКИ РОССИИ



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Российский государственный гуманитарный университет»
(ФГБОУ ВО «РГГУ»)

ИСТОРИКО-ЭКОНОМИКИ. УПРАВЛЕНИЯ И ПРАВА
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра моделирования в экономике и управлении

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

38.03.01 Экономика

Код и наименование направления подготовки/специальности

Экономика и анализ данных

Наименование направленности (профиля)/ специализации

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: *Очно-заочная*

РПД адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями
здоровья и инвалидов

Москва 2024

ЛИНЬНАЯ АЛГЕБРА

Рабочая программа дисциплины

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент, Л.Н. Сидорова

УТВЕРЖДЕНО

Протокол заседания кафедры

№_3_ от_28 марта 2024 года

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Пояснительная записка	4
1.1 Цель и задачи дисциплины	4
1.2 . Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций	4
1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
2. Структура дисциплины	5
3. Содержание дисциплины	5
4. Образовательные технологии	6
5. Оценка планируемых результатов обучения	6
5.1. Система оценивания	6
5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине	8
5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	9
6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	14
6.1. Список источников и литературы	14
6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»	15
7. Материально-техническое обеспечение дисциплины	15
8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья	15
9. Методические материалы	16
9.1. Планы семинарских занятий	16
АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	20

1. Пояснительная записка

1.1 Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины - обеспечение уровня математической грамотности студентов, достаточного для формирования навыков математической постановки и решения классических задач линейного программирования, моделирования процессов управления и экономики.

Задачи дисциплины:

- изучение основ линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования;
- выработка навыков решения типовых математических задач;
- развитие логического и алгоритмического мышления, умения строго излагать свои мысли;
- формирование умения применять основные понятия и методы линейной алгебры и линейного программирования для расчета различных количественных характеристик в задачах экономической теории и теории управления.

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Компетенция (код и наименование)	Индикаторы компетенций (код и наименование)	Результаты обучения
ОПК-2 Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; понимать принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства, и использовать их при решении задач профессиональной деятельности	ОПК-2.1. Использует методы сбора, анализа и оценки информации, отражающей состояние и тенденции в экономике	Знать: Основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования. Уметь: Использовать математический аппарат теории матриц, линейных пространств, линейных операторов; анализировать и решать системы линейных уравнений; решать простейшие задачи линейного программирования; применять усвоенные математические понятия и методы анализа для выработки оптимальных решений в сфере экономики и управления. Владеть: Навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.
	ОПК-2.2. Анализирует результаты экономико-статистических исследований и делает на их основе качественные и количественные выводы для решения практических задач	

1.3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой части блока дисциплин учебного плана.

В результате освоения дисциплины формируются знания, умения и владения, необходимые для изучения следующих дисциплин и прохождения практик: «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Экономико-математические методы и модели», «Эконометрика».

2. Структура дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 з.е., 108 академических часов.

Структура дисциплины для очно-заочной формы обучения

Объем дисциплины в форме контактной работы обучающихся с педагогическими работниками и (или) лицами, привлекаемыми к реализации образовательной программы на иных условиях, при проведении учебных занятий:

Семестр	Тип учебных занятий	Количество часов
1	Лекции	10
1	Семинары	14
Всего:		24

Объем дисциплины в форме самостоятельной работы обучающихся составляет 66 академических часов, промежуточная аттестация 18 ч.

3. Содержание дисциплины

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.	Введение в курс. Основные этапы становления современной математики и ее структура. Значение математических знаний в современном образовании экономиста и менеджера. Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность. Частные и общие решения. Эквивалентность систем, элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса).
2	Матрицы. Действия над матрицами	Понятие матрицы. Виды матриц. Действия над матрицами и их свойства: сложение, умножение на число, произведение, возведение в целую степень, матричные многочлены, транспонирование. Элементарные преобразования матриц, эквивалентные матрицы
3	Определители. Миноры и алгебраические дополнения, теорема Лапласа	Основные понятия. Схема вычисления определителей 1–3 порядка. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Общая формула для вычисления определителей: теорема Лапласа.
4	Матричные уравнения. Метод Крамера	Матричные уравнения 2-ого и 3-его порядка. Формулы Крамера.
5	Обратная матрица. Построение обратной матрицы.	Невырожденная матрица. Обратная матрица. Алгоритм построения обратной матрицы
6	Матричные уравнения. Метод обратной матрицы	Матричные уравнения 2-ого и 3-его порядка. Решение методом обратной матрицы
7	Матричные уравнения, характерные для экономических задач	Матричные уравнения, характерные для реальных экономических задач. Решение методом обратной матрицы

8	Ранг матрицы. базисный минор матрицы. Теорема Кронекера-Капелли	Ранг матрицы. Базисный минор матрицы. Теорема о ранге матрицы и ее следствия. Базис и размерность линейного пространства. Теорема Кронекера-Капелли
9	Общий метод решения системы линейных уравнений.	Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Базисные и свободные неизвестные. Свойства множеств решений однородных и неоднородных систем. Структура общего решения неоднородной системы.

4. Образовательные технологии

Для проведения учебных занятий по дисциплине используются различные образовательные технологии. Для организации учебного процесса может быть использовано электронное обучение и (или) дистанционные образовательные технологии.

5. Оценка планируемых результатов обучения

5.1. Система оценивания

В процессе изучения курса проводится контроль знаний студентов в соответствии с Положением РГГУ о его проведении. Он предполагает учет результатов написания контрольных работ на семинарских занятиях, результатов самостоятельной работы по выполнению аналитических заданий, а также степени участия студентов в обсуждении вопросов и выполнения практических заданий на семинарских занятиях.

Оценка знаний представляет собой совокупность различных показателей работы студента в течение всего процесса обучения. По курсу «Линейная алгебра» предусматривается текущий контроль успеваемости в форме опроса на занятиях, выполнения текущих семинарских, домашних и индивидуальных заданий, выполнения контрольных работ. В семестре выполняются две контрольные работы (№1 и №3). Контрольная работа №3 (коллоквиум по теоретическому материалу) проводится в письменно-устной форме. Промежуточная аттестация проводится в форме письменной Итоговой контрольной работы №2 с последующей ее защитой в устной форме, в результате чего студенту выставляются балл за экзамен (максимум 40 баллов).

С учетом набранных в сумме баллов (баллы текущего контроля и промежуточной аттестации) студенты получают общую оценку успеваемости. Итоговая оценка выставляется в полном соответствии с утверждённой в РГГУ рейтинговой системой контроля знаний.

Текущий контроль

При оценивании устного опроса и участия в дискуссии на семинаре учитываются:

- степень раскрытия содержания материала (0-2 балла);
- изложение материала (грамотность речи, точность использования терминологии и символики, логическая последовательность изложения материала (0-2 балла);
- знание теории изученных вопросов, сформированность и устойчивость используемых при ответе умений и навыков (0-1 балл).

При оценивании выполнения практических заданий учитывается:

- знание теории изученных вопросов, правильное использование полученных знаний (0-1 балла);
- полнота выполнения типового задания и/или ситуационной задачи, полнота осмысления реальной профессионально-ориентированной ситуации, необходимой для решения данной проблемы (0-2 балла);
- правильность выбора методов и моделей, позволяющие оценивать и диагностировать умения и навыки синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением

причинно-следственных связей, поиском рациональных альтернативных вариантов (0-3 балла).

При оценивании Контрольных работ учитывается:

- полнота выполненной работы (задание выполнено не полностью и/или допущены две и более ошибки или три и более неточности) – 10-13 баллов;
- обоснованность содержания и выводов работы (задание выполнено полностью, но обоснование содержания и выводов недостаточны, но рассуждения верны) –14-17 баллов;
- работа выполнена полностью, в рассуждениях и обосновании нет пробелов или ошибок, возможна одна неточность – 18-20 баллов.

Промежуточная аттестация (экзамен)

При проведении промежуточной аттестации студент должен решить 5 заданий и обосновать эти решения теоретически.

При оценивании заданий и ответов на вопросы теоретического характера учитывается:

- теоретическое содержание не освоено, знание материала носит фрагментарный характер, наличие грубых ошибок в ответе (1-3 балла);
- теоретическое содержание освоено частично, допущено не более двух-трех недочетов (4-7 баллов);
- теоретическое содержание освоено почти полностью, допущено не более одного-двух недочетов, но обучающийся смог бы их исправить самостоятельно (8-11 баллов);
- теоретическое содержание освоено полностью, ответ построен по собственному плану (12-20 баллов).

При оценивании ответа на вопрос практического характера (решений) учитывается:

- ответ содержит менее 20% правильного решения (1-2 баллов);
- ответ содержит 21-89 % правильного решения (3-10 баллов);
- ответ содержит 90% и более правильного решения (11-20 баллов).

Форма контроля	Макс. количество баллов	
	За одну работу	Всего
Текущий контроль:		
- Защита индивидуального домашнего задания		10 баллов
- Участие в дискуссии на семинаре, проверка текущего домашнего задания	1-2 балла	15 баллов
- Контрольная работа №1 (темы 1-4)		20 баллов
- Контрольная работа №3 (коллоквиум по теоретическому материалу, письменно-устная форма) (темы 1-9)		15 баллов
Промежуточная аттестация (Контрольная работа №2, Итоговая) (темы 5-9)		40 баллов
Итого за семестр		100 баллов

Полученный совокупный результат конвертируется в традиционную шкалу оценок и в шкалу оценок Европейской системы переноса и накопления кредитов (European Credit Transfer System; далее – ECTS) в соответствии с таблицей:

100-балльная шкала	Традиционная шкала		Шкала ECTS
95 – 100	отлично	зачтено	A
83 – 94			B
68 – 82	хорошо		C

56 – 67	удовлетворительно		D
50 – 55			E
20 – 49	неудовлетворительно	не зачтено	FX
0 – 19			F

В случае неаттестации обучающегося по курсу дисциплины передача осуществляется в форме традиционного экзамена, на котором предлагаются два варианта Контрольных работ (текущей и Итоговой) соответствующего семестра. Экзамен считается сданным, если решено более 2-х задач.

5.2. Критерии выставления оценки по дисциплине

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
100-83/ A, B	«отлично»/ «зачтено (отлично)»/ «зачтено»	<p>Выставляется обучающемуся, если он глубоко и прочно усвоил теоретический и практический материал, может продемонстрировать это на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся исчерпывающе и логически стройно излагает учебный материал, умеет увязывать теорию с практикой, справляется с решением задач профессиональной направленности высокого уровня сложности, правильно обосновывает принятые решения.</p> <p>Свободно ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «высокий».</p>
82-68/ C	«хорошо»/ «зачтено (хорошо)»/ «зачтено»	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает теоретический и практический материал, грамотно и по существу излагает его на занятиях и в ходе промежуточной аттестации, не допуская существенных неточностей.</p> <p>Обучающийся правильно применяет теоретические положения при решении практических задач профессиональной направленности разного уровня сложности, владеет необходимыми для этого навыками и приёмами.</p> <p>Достаточно хорошо ориентируется в учебной и профессиональной литературе.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации.</p> <p>Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «хороший».</p>
67-50/ D, E	«удовлетворительно»/ «зачтено (удовлетворительно)»/ «зачтено»	<p>Выставляется обучающемуся, если он знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает отдельные ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации.</p> <p>Обучающийся испытывает определённые затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, владеет необходимыми для этого базовыми навыками и приёмами.</p> <p>Демонстрирует достаточный уровень знания учебной литературы по дисциплине.</p> <p>Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом</p>

Баллы/ Шкала ECTS	Оценка по дисциплине	Критерии оценки результатов обучения по дисциплине
		результатов текущей и промежуточной аттестации. Компетенции, закреплённые за дисциплиной, сформированы на уровне – «достаточный».
49-0/ F, FX	«неудовлетворительно»/ не зачтено	Выставляется обучающемуся, если он не знает на базовом уровне теоретический и практический материал, допускает грубые ошибки при его изложении на занятиях и в ходе промежуточной аттестации. Обучающийся испытывает серьёзные затруднения в применении теоретических положений при решении практических задач профессиональной направленности стандартного уровня сложности, не владеет необходимыми для этого навыками и приёмами. Демонстрирует фрагментарные знания учебной литературы по дисциплине. Оценка по дисциплине выставляется обучающемуся с учётом результатов текущей и промежуточной аттестации. Компетенции на уровне «достаточный», закреплённые за дисциплиной, не сформированы.

5.3. Оценочные средства (материалы) для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Контрольные вопросы по курсу

1. Виды матриц. Примеры.

Ответ: Прямоугольная матрица $B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

диагональная матрица $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

треугольная матрица $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$,

матрица-строка $K_{1 \times 2} = (2 \ 3)$,

матрица-столбец $M_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

единичная матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

нулевая матрица $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Особенные матрицы: нулевая и единичная. Примеры.

Ответ: E - единичная матрица, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 0 - нулевая матрица, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Может ли нулевая матрица быть прямоугольной?

Ответ: Да, может. Например: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Какие операции можно производить над матрицами?

Ответ: Умножать на число;

суммировать (вычитать), если матрицы одного размера;

умножать матрицы, если число столбцов первой совпадает с числом строк второй матрицы;

возводить в степень квадратные матрицы,

транспонировать матрицу.

5. Когда можно суммировать и вычитать матрицы? Примеры.

Ответ: Можно суммировать и вычитать матрицы, если матрицы одного размера.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Когда можно умножать матрицы? Примеры.

Ответ: Умножать матрицы можно, если число столбцов первой совпадает с числом строк второй матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

8. Найти значение выражения: $-5 \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $-5A = -5 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}$

9. Найти значение выражения: $A + E$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, а $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $A + E = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

10. Найти результат умножения матриц: $A \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $A \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -9 \\ -15 & 16 \end{pmatrix}$

11. Возможно ли произведение матриц $A \cdot B$? Если произведение возможно, то вычислить его, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: Возможно, поскольку $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 3} = C_{2 \times 3}$ (число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 3 & 12 \\ 12 & 1 & 17 \end{pmatrix}$$

12. Возможно ли произведение матриц $B \cdot A$? Если произведение возможно, то вычислить его, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: Невозможно найти произведение, поскольку $B_{2 \times 3} \cdot A_{2 \times 2}$ (число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A)

13. Возможно ли деление матриц A и B ?

Ответ: Не существует операции деления матриц.

14. Решить систему линейных уравнений (СЛУ). Ответить на вопросы. СЛУ совместная или несовместная? Если совместная, то определенная или неопределенная? $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

Ответ: ($x_1=1, x_2=2$). СЛУ совместная, определенная.

15. Решить систему линейных уравнений (СЛУ). Ответить на вопросы. СЛУ совместная или несовместная? Если совместная, то определенная или неопределенная? $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$

Ответ: ($x_1=c, x_2=c-1$), где $c=\text{const}$. СЛУ совместная, неопределенная.

16. Решить систему линейных уравнений (СЛУ). Ответить на вопросы. СЛУ совместная или несовместная? Если совместная, то определенная или неопределенная? $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 4 \end{cases}$

Ответ: (x_1, x_2) $\in \emptyset$. СЛУ несовместная (нет решений).

17. Решить СЛУ методом Гаусса (метод исключения неизвестных)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

Ответ: ($x_1=1, x_2=2$). СЛУ совместная, определенная.

18. Решить СЛУ методом Гаусса (метод исключения неизвестных)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: $(x_1=3, x_2=2, x_3=-2)$. СЛУ совместная, определенная.

19. Какое решение СЛУ называется тривиальным?

Ответ: Нулевое решение называется тривиальным.

20. Посчитать определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

Ответ: $\det(A)=5$.

21. Посчитать определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$

Ответ: $\det(C)=-5$

22. Посчитать определитель единичной матрицы $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\det(E)=1$

23. Посчитать определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\det(B)=-13$

24. Какие матрицы называются вырожденными?

Ответ: Матрицы, определитель которых равен нулю, называются вырожденными.

25. Какие матрицы называются невырожденными?

Ответ: Матрицы, определитель которых не равен нулю, называются невырожденными.

26. Посчитать определитель треугольной матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ответ: По свойству определителя треугольной матрицы, легко посчитать, что определитель равен: $\det(A)=-1 \cdot (-5) \cdot 6=30$.

27. Посчитать определитель матрицы A по Правилу Сарруса (другое название: Правило Звезды, Правило Треугольников)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\det(A)=67$

28. Посчитать Определитель матрицы A по теореме Лапласа (разложением по строке

или столбцу)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 7 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\det(A)=67$

29. Записать СЛУ в виде матричного уравнения $AX=B$, где A - матрица системы (матрица коэффициентов при переменных), X -матрица-столбец переменных, а B - матрица-столбец свободных членов.

$$\text{СЛУ: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Практическая работа 1

Записать СЛУ в виде матричного уравнения $AX=B$, где A - матрица системы, X -матрица-столбец переменных, а B - матрица-столбец свободных членов.

$$\text{СЛУ: } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Вопрос: Условие, при котором можно использовать Правило Крамера для решения СЛУ.

Ответ: Матрица свободных членов должна быть матрицей-столбцом, определитель матрицы системы не должен равняться нулю.

Практическая работа 2

Решить систему уравнений по правилу Крамера. Найти определитель матрицы

$$\text{системы и решить СЛУ. } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

Ответ: $(x_1=1, x_2=2)$. СЛУ совместная, определенная.

Решить систему уравнений, используя правило Крамера. Найти определитель матрицы системы, решить СЛУ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

Ответ: $(x_1=3, x_2=2, x_3=-2)$. СЛУ совместная, определенная.

Итоговая контрольная работа

Вычисление матричного полинома.

Поиск определителя матрицы по правилу Сарруса

Поиск определителя матрицы по теореме Лапласа.

Решение определенных систем линейных уравнений 3-го порядка

а) методом Гаусса

б) методом Крамера.

1. Найти ранг матрицы A ,. $\text{Rang}A$ - ? $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ответ: $\text{Rang}A=1$

2. Найти ранг матрицы A ,. $RangA - ? A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Ответ: $RangA=1$

3. Найти ранг матрицы A ,. $RangA - ? A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: $RangA=2$

Найти ранг матрицы A ,. $RangA - ? A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -8 & 3 & -25 \end{pmatrix}$

Ответ: $RangA=2$

4. Найти ранг матрицы A ,. $RangA - ? A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ -8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Ответ: $RangA=3$

5. Исследовать систему линейных уравнений на совместность/несовместность, определенность/неопределенность, не решая ее. Использовать теорему Кронекера-Капелли, т.е. сравнить ранг матрицы системы уравнений ($RangA$) и ранг расширенной матрицы системы уравнений ($RangA_p$).

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 15 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

Ответ: $RangA=3, RangA_p=3$, т.е. $RangA = RangA_p$

$n=3$ (число переменных), СЛУ совместная, определенная.

6. Исследовать СЛУ на совместность/несовместность, определенность/неопределенность, не решая ее. Использовать Теорему Кронекера-Капелли, т.е. сравнить ранг матрицы системы уравнений ($RangA$) и ранг расширенной матрицы системы уравнений ($RangA_p$).

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 11 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 8 \end{cases}$$

Ответ: $RangA=2, RangA_p=3$, т.е. $RangA \neq RangA_p$

СЛУ несовместная (не имеет решения).

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Список источников и литературы

Основная литература

1. Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, И.М. Тришин. Линейная алгебра: учебник и практикум для вузов. Под ред. Н.Ш. Кремера. 3-е изд., испр. и доп. Москва: Издательство Юрайт, 2023 - 422 с.

Дополнительная литература

1. Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, Б.А. Путько, И.М. Тришин. Высшая математика для экономического бакалавриата. В 3-х частях. Ч.1: учебник и практикум для вузов. Под ред. Н.Ш. Кремера. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Издательство Юрайт, 2023 - 276 с.

6.2. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Национальная электронная библиотека (НЭБ) www.rusneb.ru
2. ELibrary.ru Научная электронная библиотека www.elibrary.ru
3. Электронная библиотека Grebennikon.ru www.grebennikon.ru
4. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. - М.: Айрис-пресс, 2007 - 576 с. *Интернет-ресурс*: http://eknigi.org/estestvennye_nauki/83499-sbornik-zadach-po-vysshej-matematike-1-kurs.html
5. Лекции по линейной алгебре [Электронный ресурс] : учебное пособие для бакалавриата по направлению № 080200 – Менеджмент, № 080400 – Управление персоналом / Минобрнауки России, Федер. гос. бюджетное образоват. учреждение высш. проф. образования "Рос. гос. гуманитарный ун-т" (РГГУ), Ин-т экономики, упр. и права, Фак. упр., Каф. моделирования в экономике и упр., [сост.: Н. Л. Лепе, Н. И. Манаенкова ; отв. ред. В. В. Кульба]. - Москва : РГГУ, 2014. - 202 с. - Режим доступа: <http://elib.lib.rsuh.ru/elib/000009509>. - Загл. с экрана. - ISBN 978-5-7281-1699-8.

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для обеспечения дисциплины используется материально-техническая база образовательного учреждения: учебные аудитории, оснащённые компьютером и проектором для демонстрации учебных материалов, оборудованные большими досками.

Состав программного обеспечения:

1. Windows
2. Microsoft Office
3. Kaspersky Endpoint Security

8. Обеспечение образовательного процесса для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- для слепых и слабовидящих: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением или могут быть заменены устным ответом; обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств; письменные задания оформляются увеличенным шрифтом; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

- для глухих и слабослышащих: лекции оформляются в виде электронного документа, либо предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования; письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме; экзамен и зачёт проводятся в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.

- для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата: лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением; письменные задания выполняются на компьютере со специализированным программным обеспечением; экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

При проведении процедуры оценивания результатов обучения предусматривается использование технических средств, необходимых в связи с индивидуальными особенностями обучающихся. Эти средства могут быть предоставлены университетом, или могут использоваться собственные технические средства.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- для слепых и слабовидящих: в печатной форме увеличенным шрифтом, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.
- для глухих и слабослышащих: в печатной форме, в форме электронного документа.
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: в печатной форме, в форме электронного документа, в форме аудиофайла.

Учебные аудитории для всех видов контактной и самостоятельной работы, научная библиотека и иные помещения для обучения оснащены специальным оборудованием и учебными местами с техническими средствами обучения:

- для слепых и слабовидящих: устройством для сканирования и чтения с камерой SARA CE; дисплеем Брайля PAC Mate 20; принтером Брайля EmBraille ViewPlus;
- для глухих и слабослышащих: автоматизированным рабочим местом для людей с нарушением слуха и слабослышащих; акустический усилитель и колонки;
- для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата: передвижными, регулируемые эргономическими партами СИ-1; компьютерной техникой со специальным программным обеспечением.

9. Методические материалы

9.1. Планы семинарских занятий

Семинар 1-2. Тема 1 Системы линейных уравнений (СЛУ). Метод Гаусса. Использование СЛУ в решениях экономических задач: на примере «Задачи о фермере».

План семинара

1. Системы линейных уравнений 2, 3, n-го порядка. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Три типа систем линейных уравнений.
2. Пример Постановки задачи. Сведение текстовой задачи (Задача о фермере, 3 варианта) к системам линейных уравнений 3 типов.

Задания

1. Разбор и решение задачи № 2.1.37 - Метод Гаусса. (Здесь и далее все №№ практических заданий даны по Задачнику [3] из списка Обязательной Литературы.)
2. Постановка и решение «Задачи о фермере».
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 2.1.12, 2.1.13, 2.1.14. Составить индивидуальную задачу аналогичную «Задаче о фермере».

ЗАДАЧА О ФЕРМЕРЕ.

Вариант 1: Фермер вложил в прошлом году в зерноводство, животноводство и овощеводство всего 10 млн.д.е. и получил 780тыс.д.е. прибыли. В текущем году он собирается увеличить вложения в зерноводство в 2 раза, в животноводство в 3 раза, а вложения в овощеводство оставить на прошлогоднем уровне. На все это фермер выделяет 22 млн.д.е. Какую прибыль собирается получить фермер в текущем году, если зерноводство приносит 10% прибыли на вложенные средства, животноводство 8% и овощеводство 6%?

Вариант 2: Рассмотрим задачу из Варианта 1 со следующими изменениями: зерноводство приносит 8% прибыли на вложенные средства, животноводство 10% и овощеводство 6%.

Вариант 3: Рассмотрим задачу из Варианта 2 со следующими изменениями: Фермер получил 840 тыс.д.е. прибыли.

Семинар 3. Тема 2 Матрицы. Операции над матрицами. Приведение матрицы системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Свойства умножения матриц.

План семинара

1. Матрицы: виды матриц.
2. Матричные операции: сложение, умножение, возведение в степень. Возможность выполнения в зависимости от размерности, правила выполнения, свойства. Транспонирование матриц.
3. Матричный полином.
4. Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду.
5. Правила умножения матриц. Примеры отсутствия коммутативности умножения матриц.

Задания

1. Матрицы. Разбор и решение задач №№ 1.1.1, 1.1.2, 1.1.11, 1.1.7, 1.1.21
2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.1.3, 1.1.5, 1.1.53, 1.1.17, 1.1.27, 1.1.79, 1.1.80.

Семинар 4-5. Тема 3 Определители матриц, миноры и алгебраические дополнения.

План семинара

1. Определитель матрицы 2-ого порядка, 3-ого порядка.
2. Правило «треугольников» (правило Саррюса).
3. Миноры и алгебраические дополнения.
4. Определитель матрицы n-го порядка. Теорема Лапласа. Вычисление определителей методом разложения по строке или столбцу.

Задания

1. Вычисление Определителей 2-ого порядка, 3-ого порядка. Разбор и решение задач №№ 1.2.1, 1.2.20, 1.2.13, 1.2.24, 1.2.25, 1.4.1.
2. Вычисление миноров. Вычисление Определителей матриц 3-го и 4-ого порядка. Разбор и решение задач №№ 1.2.24, 1.2.25, 1.4.1.
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.2.4, 1.2.6, 1.2.22, 1.2.23, 1.2.26, 1.2.29.

Семинар 6. Тема 4 Матричные уравнения. Метод Крамера.

План семинара

1. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
2. Матричные уравнения 2-го и 3-го порядка.

Задания

1. Решение систем линейных уравнений методом Крамера. Разбор и решение задачи №№ 2.2.2.
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.4.30, 1.4.34, 2.2.11 (решение методом Крамера)

Семинар 7. Контрольная работа №1: Операции над матрицами. Вычисление определителей. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, методом Крамера.

Контрольная работа №1.

Вычисление матричного полинома.

Поиск определителя матрицы по правилу Саррюса

Поиск определителя матрицы по теореме Лапласа.

Решение определенных систем линейных уравнений 3-го порядка

а) методом Гаусса

б) методом Крамера.

Задания

1. Решение индивидуального варианта Контрольной работы №1 в письменной форме.
2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: Решение невыполненных №№ Контрольной работы № 1; решение невыполненных задач Домашнего задания к Семинарам 1, 2, 3.

Семинар 8. Тема 5 Обратная матрица. Построение обратной матрицы.

План семинара

1. Обратная матрица.
2. Присоединенная матрица.

3. Алгоритм вычисления обратной матрицы.

Задания

1. Разбор и решение задач Домашнего задания №№ 1.2.6, 1.2.29.
2. Построение Обратной матрицы. Разбор и решение задачи 1.4.9.
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.4.4, 1.4.10, 1.4.11, 1.4.38, 1.4.39

Семинар 9. Тема 6 Матричные уравнения. Метод обратной матрицы.

План семинара

1. Матричные уравнения 2-го и 3-го порядка.
2. Решение матричных уравнений методом обратной матрицы.

Задания

1. Решение Матричных уравнений методом обратной матрицы. Разбор и решение задачи №№ 1.4.27.
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 2.2.22, 2.2.23 (решение методом обратной матрицы).

Семинар 10. Тема 7 Матричные уравнения, характерные для экономических задач. Решение этих матричных уравнений с помощью метода обратной матрицы.

План семинара

1. Матричные уравнения, характерные для экономических задач.
2. Решение матричных уравнений методом обратной матрицы.

Задания

1. Решение Матричных уравнений, характерных для реальных экономических задач методом обратной матрицы. Разбор и решение задач из рекомендуемого учебника.
3. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.4.29-1.4.31 (решение методом обратной матрицы).

Семинар 11. Тема 8 Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

План семинара

- 1) Разбор и индивидуальное исправление ошибок в Контрольной работе № 1
- 2) Поиск ранга ступенчатой матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
- 3) Поиск ранга расширенной матрицы системы линейных уравнений.
- 4) Решение матричных уравнений.

Задания

1. Поиск ранга ступенчатой матрицы в задачах Домашнего задания №№ 1.1.79, 1.1.80
2. Поиск ранга расширенной матрицы системы линейных уравнений в Задаче о фермере (три варианта). Исследование совместности систем линейных уравнений.
3. Решение Матричных уравнений. Разбор и решение задачи №№ 1.4.30.
4. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 1.1.28, 1.3.2, 1.3.18, 1.4.29, 2.1.47.

Семинар 12. Тема 9 Исследование систем линейных уравнений. Базисный минор, базисные и свободные переменные.

План семинара

1. Базисный минор, базисные и свободные переменные.
2. Базисное решение.

Задания

1. Исследовать систему линейных уравнений. Если она совместна, указать базисный минор, базисные и свободные переменные. Найти базисное решение.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 15 \end{cases}$$

2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: №№ 2.1.15

Семинар 13. Итоговая Контрольная работа № 2

Итоговая Контрольная работа (№ 2)

1. Построение обратной матрицы

2. Решение матричного уравнения с помощью обратной матрицы.
3. Решение матричного уравнения, характерного для экономических задач.
4. Исследование систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.
5. Решение неопределенных систем линейных уравнений.

Задания

1. Решение индивидуального варианта Итоговой Контрольной работы в письменной форме.
2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ: Решение невыполненных заданий Итоговой Контрольной работы. Подготовка индивидуального вопроса Коллоквиума по теоретическому материалу I семестра в письменной форме.

Семинар 14. Контрольная работа № 3 Коллоквиум по теоретическому материалу

1. Контрольная работа № 3 Коллоквиум по теоретическому материалу курса «Линейная алгебра». Контрольные вопросы 1-19.

АННОТАЦИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Линейная алгебра» реализуется на Экономическом факультете Института Экономики, управления и права кафедрой Моделирования в экономике и управлении.

Цель дисциплины: обеспечение уровня математической грамотности студентов, достаточного для формирования навыков математической постановки и решения классических задач линейного программирования, моделирования процессов управления и экономики.

Задачи:

- изучение основ линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования;
- выработка навыков решения типовых математических задач;
- развитие логического и алгоритмического мышления, умения строго излагать свои мысли;
- формирование умения применять основные понятия и методы линейной алгебры и линейного программирования для расчета различных количественных характеристик в задачах экономической теории и теории управления.

Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:

ОПК-2 Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; понимать принципы работы современных информационных технологий и программных средств, в том числе отечественного производства, и использовать их при решении задач профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

- основы линейной алгебры, аналитической геометрии и линейного программирования – операции над векторами и матрицами; определители и их свойства; системы линейных алгебраических уравнений;
- собственные значения и собственные векторы матриц; комплексные числа; прямые и плоскости в аффинном пространстве;
- квадратичные формы, линейные задачи оптимизации и их графическое решения – в объеме, необходимом для решения экономических задач;

Уметь:

- использовать математический аппарат теории матриц, линейных пространств, линейных операторов; анализировать и решать системы линейных уравнений;
- решать простейшие задачи линейного программирования; применять усвоенные математические понятия и методы анализа для выработки оптимальных решений в сфере экономики и управления;

Владеть:

- навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач; методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

По дисциплине предусмотрена промежуточная аттестация в виде экзамена.

Общая трудоемкость освоения дисциплины составляет 3 зачетные единицы.